هوشنگ شرقی

پاسخ به برخی ابهام‌ها درمورد ترسیم‌های هندسی

مقدمه

ترسیم‌های هندسی از بحث‌های بسیار کارامد در هندســه‌اند و می‌توانند به پرورش قوهٔ خلاقیت دانش‌آموزان کمک بسیاری کنند و در عین حال، به تفهیم مباحث گوناگون هندسه و نیز تقویت شهود هندسی در آنان بینجامند. اما به اعتقاد نگارنده، این بحث در کتاب درسی هندسهٔ ۲، به‌دلیل وجود برخی ابهام‌ها، آنچنان که باید و شاید به این امر منتهی نمی‌شود. مهم‌ترین این ابهام‌ها که در مقالهٔ حاضر به آن‌ها پرداخته می‌شود، عبارت‌اند از:

الف) منظور از ترسیم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار چیست؟ چرا مجاز به استفاده از سایر ابزارها نیستیم؟

ب) چرا در مسائل ترسیم، در بسیاری مواقع می‌گوییم: مسئله را حل شده فرض می‌کنیم؟!

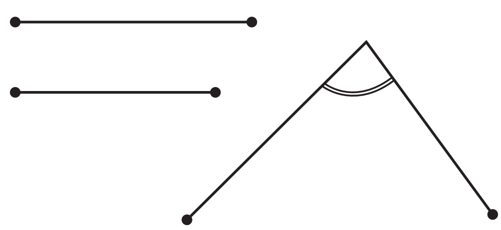
ج) اصلاً هدف از ترسیم‌های هندسی چیست؟

در این نوشتهٔ مختصر تلاش می‌کنیم از این ابهام‌ها پرده برداریم، با بحثی ساده و صادقانه با دانش‌آموزان سخن بگوییم و اهمیت بحث ترسیم‌های هندسی را برای آنان روشن سازیم.

الف) ترسیم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار

در ترســیم‌های هندسی، مجاز به استفاده از هیچ ابزاری به غیر از یک خط‌کش غیرمدرج (وسیله‌ای برای رسم خط راست) و پرگار نیســتیم. این محدودیت از آن جهت اســت که هرقدر وســایل ما محدودتر باشــند، نیاز به خلاقیت و ابتکار بیشــتر می‌شود و اهداف آموزشی بیشــتری برآورده خواهند شــد. فرض کنید که مسئلهٔ ما این باشــد که بخواهیم مثلثی را با معلــوم بودن اندازه‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها رســم کنیم. اگر اندازه‌های دو ضلع با واحد معین و زاویــهٔ بین آن‌ها برحســب درجه داده شــده و خط‌کش مدرج و نقاله (وســیلهٔ اندازه‌گیــری زاویه با واحد معینی) در اختیار باشــد، دیگــر کاری بــرای انجام دادن باقی نمی‌ماند! (بــا نقاله زاویهٔ معین را جــدا می‌کنیــم و روی اضــلاع آن با خط‌کش مــدرج طول‌های داده شــده را مشــخص می‌کنیم و انتهای دو پاره‌خط را به‌هم وصل می‌کنیم!)

پس صورت مســئله چگونه اســت؟ آری این موضوعی است که در کتاب درســی به شایستگی پرورانده نشده است. در واقع مسئله ما این اســت: «دو پاره‌خط و یک زاویه به‌صورت زیر داده شــده‌اند. مثلثی بســازید کــه دو ضلع آن به اندازهٔ دو پاره‌خــط، و زاویهٔ بین آن‌ها، به اندازهٔ این زاویه باشد.» و دیگر نیازی به نقاله و یا خط‌کش مدرج نداریم.



شکل ۱

برای آنکه بتوانیم ترسیم را به این صورت انجام دهیم، به برخی ترسیم‌های اولیه نیاز داریم. بعضی از این ترسیم‌ها در کتاب درسی آمده‌اند، اما جای بعضی دیگر خالی است. در اینجا به همهٔ آن‌ها اشاره می‌کنیم:

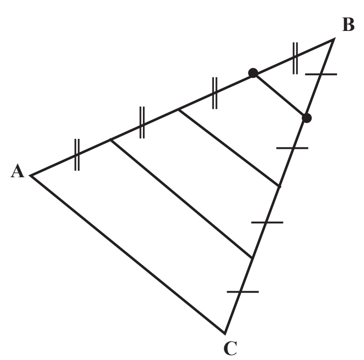
ترسیم‌های اولیه

۱. رسم پاره‌خطی مساوی پاره‌خط مفروض

روش رسم بسیار ساده است. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ پاره‌خط مفروض باز می‌کنیم و بدون تغییر، آن را در محل موردنظر قرار می‌دهیم و با خط‌کش پاره‌خط مطلوب را رسم می‌کنیم.

۲. رسم پاره‌خطی که طول آن نسبتی از پاره‌خط مفروض باشد

پاره‌خطی با طول a داریم. می‌خواهیم پاره‌خطی به طول ka (مثلاً $2a$، $\frac{a}{2}$، $\frac{3a}{4}$ و...) رسم کنیم. این کار کمی پیچیده‌تر است، ولی با استفاده از «قضیهٔ تالس» و رسم خطوط موازی، کار ساده‌تر می‌شود. با یک مثال مسئله را روشن می‌کنیم. پاره‌خطی به طول a داریم، می‌توانیم آن را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم. به این منظور از انتهای پاره‌خط (یا ابتدای آن) n پاره‌خط دلخواه و مساوی و هم‌راستا (به کمک پرگار و خط‌کش) پشت سرهم رسم می‌کنیم. آن‌گاه از محل تقسیم پاره‌خط‌های مساوی، خطوطی موازی با پاره‌خط AC در شکل رسم می‌کنیم. (طریقهٔ رسم خطی موازی با خط مفروض در کتاب درسی آمده است.) این خطوط موازی، پاره‌خط مفروض AB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. (در شکل، AB به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است.)

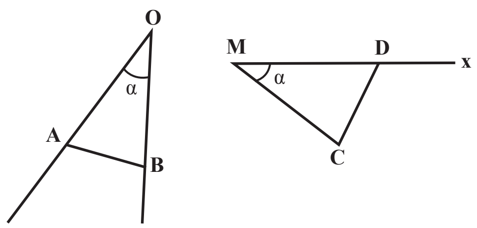


شکل ۲

با این فرایند و با داشتن پاره‌خط AB به راحتی می‌توان پاره‌خط kAB را رسم کرد. مثلاً اگر بخواهیم پاره‌خطی به طول $\frac{3a}{5}$ رسم کنیم، پاره‌خط به طول a را به پنج قسمت مساوی تقسیم و سپس پاره‌خطی مساوی سه‌تا از این قسمت‌ها رسم می‌کنیم.

منظور از ترسیم با خط‌کش غیرمدرج و پرگار چیست؟ چرا مجاز به استفاده از سایر ابزارها نیستیم؟

۳. رسم زاویه‌ای مساوی زاویهٔ مفروض



شکل ۳

از نقطه‌ای دلخواه در صفحه برای رسم زاویه‌ای مساوی زاویهٔ معلوم α که رأس آن نقطهٔ M در صفحه باشد، از M دو خط موازی اضلاع این زاویه رسم می‌کنیم. اما اگر یکی از اضلاع زاویه نیز داده شده باشد (در شکل Mx) که موازی هیچ‌یک از اضلاع زاویه نباشد، از ویژگی مثلث‌های هم‌نهشت کمک می‌گیریم. به مرکز O (رأس زاویهٔ α) به شعاع دلخواه دایره‌ای می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. حالا کافی است که مثلث متساوی‌الساقین MCD را هم‌نهشت با مثلث متساوی‌الساقین OAB بنا کنیم تا نتیجه شود: $C\hat{M}x = \alpha$. توضیح دهید که چگونه با استفاده از پرگار می‌توانیم این کار را به‌سادگی انجام دهیم.

۴. رسم خطی موازی خط مفروض، از نقطه‌ای دلخواه در صفحه

۵. رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه خارج از خط

۶. رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه واقع بر آن

۷. رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

۸. رسم نیم‌ساز یک زاویه

موارد (۴) تا (۸) در کتاب درسی توضیح داده شده‌اند. به کمک این ترسیم‌های اولیه، حالا آمادگی آن را داریم که ترسیم‌های بیشتری را انجام دهیم. اما برای این‌کار لازم است به‌جز آگاهی از این ترسیم‌های ابتدایی، از تمام قضیه‌ها و ویژگی‌های گوناگون شکل‌های هندسی نیز آگاه باشیم و این کار را هیجان‌انگیزتر می‌کند!

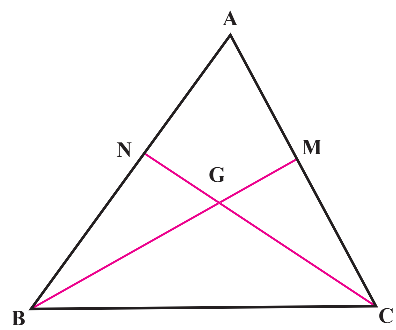
تمرین: چگونگی رسم یک مثلث با داشتن اندازه‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، دو زاویه و ضلع بین آن‌ها، و سه ضلع را بیان کنید.

ب) مسئله را حل شده فرض می‌کنیم!

وقتی در یک مسئلهٔ رسم می‌گوییم «مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم»، در واقع می‌خواهیم از «استدلال بازگشتی» که با آن از درس جبر و احتمال آشنایی دارید، استفاده کنیم. یعنی با اینکه شکل ما هنوز رسم نشده است، ولی آن را رسم می‌کنیم تا با توجه به شکل، راهبردی برای ترسیم بیابیم. با چند مثال، موضوع روشن‌تر می‌شود:

● **مثال ۱:** مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های BC=a، m_b و m_c (میانه‌های وارد بر اضلاع AB و AC) رسم کنید.

◆ **حل:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر مثلث مطلوب، مثلث ABC در شکل زیر باشد و BC=a، $BM=m_b$ و $CN=m_c$ معلوم باشند، با توجه به ویژگی نقطهٔ همرسی میانه‌ها (G) داریم:

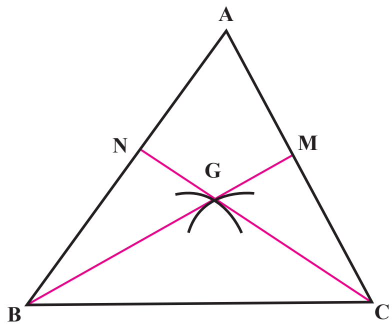


شکل ۴

$$BG=\frac{۲}{۳}BM=\frac{۲}{۳}m_b, CG=\frac{۲}{۳}CN=\frac{۲}{۳}m_c$$

پس طول‌های اضلاع مثلث GBC معلوم‌اند و می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم و از روی آن مثلث ABC را بنا کنیم. اکنون آماده‌ایم تا روش ترسیم را شرح دهیم:

روش رسم: پاره‌خطی به طول معلوم a=BC رسم می‌کنیم. آن‌گاه پاره‌خط‌هایی به طول‌های $\frac{۲}{۳}m_b$ و $\frac{۲}{۳}m_c$ می‌سازیم (چگونه؟ به ترسیم‌های اولیه رجوع کنید) و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $\frac{۲}{۳}m_b$ باز می‌کنیم و به مرکز B به این شعاع کمان می‌زنیم. سپس به مرکز C و به شعاع $\frac{۲}{۳}m_c$ کمان می‌زنیم. نقطهٔ برخورد دو کمان G است و مثلث GBC را رسم می‌کنیم. حال BG را از طرف G به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_b$ و GC را از طرف G به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_c$ امتداد می‌دهیم تا نقاط M و N به‌دست آیند. C را به M و B را به N وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا از برخورد آن‌ها A به‌دست آید و از آنجا مثلث ABC بنا شود.

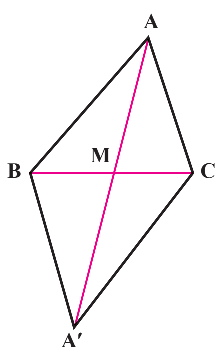


شکل ۵

شرط وجود جواب: اگر دو کمان فوق یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند (یعنی مثلث GBC وجود داشته باشد) مسئله جواب دارد، یعنی با شرط $\frac{۲}{۳}m_b+\frac{۲}{۳}m_c>a$ مسئله جواب دارد و در غیر این‌صورت جواب ندارد.

● **مثال ۲:** مثلث ABC را با معلوم بودن طول‌های AB=c، AC=b و میانهٔ $AM=m_a$ رسم کنید.

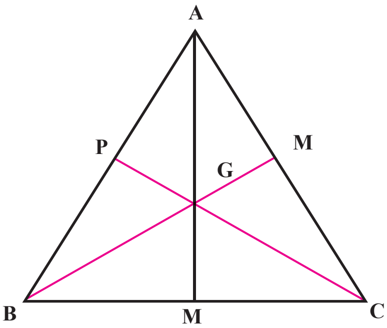
◆ **حل:** مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، مطابق شکل طول‌های AB و AC و AM معلوم‌اند.



شکل ۶

اگر میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A´ امتداد دهیم و A´ را به C و B وصل کنیم، A´BAC چه نوع چهارضلعی است و چرا؟ بنابراین: A´C=AB. پس در مثلث AA´C طول‌های سه ضلع معلوم‌اند و این مثلث قابل رسم است. می‌توان ابتدا این مثلث را رسم کرد و از آنجا مثلث ABC را بنا گذاشت. روش رسم را توضیح دهید و شرط وجود جواب را بنویسید.

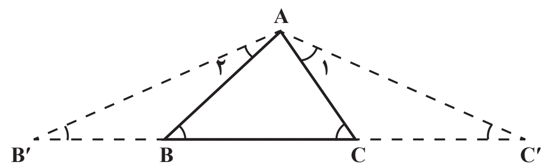
تمرین: مثلث ABC را با معلوم بودن طول‌های سه میانهٔ آن رسم کنید.



شکل ۷

راهنمایی: در مثلث GBC، طول‌های GB و GC و میانهٔ GM معلوم‌اند. ابتدا با توجه به مسئلهٔ قبل، این مثلث را رسم کنید.

● **مثال ۳:** مثلث ABC را با داشتن اندازهٔ محیط و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ رسم کنید.



شکل ۸

◆ **حل:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، اینکه محیط مثلث، یعنی AB+AC+BC معلوم است، به ما این ایده را می‌دهد که باید BC را از دو طرف به اندازهٔ AB و AC امتداد دهیم تا پاره‌خطی مساوی محیط مثلث بنا شود. با این کار، پاره‌خط B´C´ به‌دست می‌آید (BB´=AB و CC´=AC) که با محیط مثلث برابر است. همچنین مثلث‌های ABB´ و ACC´ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین:

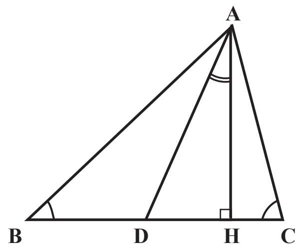
$$\hat{A}_1 = \hat{C}', \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{C}' = 2\hat{C}' \Rightarrow \hat{C}' = \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{B}', \hat{B} = \hat{A}_2 + \hat{B}' = 2\hat{B}' \Rightarrow \hat{B}' = \frac{\hat{B}}{2}$$

اکنون مثلث AB´C´ با معلوم بودن B´C´ و زوایای B´ و C´ (که از روی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ قابل رسم و بنا کردن در دو طرف B´C´ هستند ـ به ترسیم‌های اولیه مراجعه شود) قابل رسم است و از آنجا می‌توان مثلث ABC را رسم کرد. طریقهٔ رسم را توضیح دهید.

تمرین: مربعی را با معلوم بودن مجموع ضلع و قطر آن رسم کنید.

● **مثال ۴:** مثلث ABC را با معلوم بودن طول نیمساز AD، اندازه‌های زاویهٔ $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ (با شرط $\hat{C} > \hat{B}$) رسم کنید.



شکل ۹

◆ **حل:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر قضیه‌ای را در هندسه به‌یاد داشته باشیم که زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز در مثلث را به ما می‌گوید، کار آسان می‌شود. مطابق این قضیه، نیمساز هر رأس و ارتفاع همان رأس، زاویه‌ای مساوی نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث، با هم می‌سازند. یعنی در شکل بالا داریم: $D\hat{A}H = \frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}$ (ثابت کنید!) حالا کافی است AD را رسم کنید و سپس دو زاویه، مساوی $\frac{\hat{A}}{2}$ در طرفین آن بنا کنیم. در ادامه، زاویهٔ مساوی $\frac{\hat{C}-\hat{B}}{2}$ را در درون یکی از این دو زاویه بسازیم و از D بر ضلع این زاویه، عمودی رسم کنیم و... (راه‌حل را کامل کنید)

ج) اهمیت ترسیم‌های هندسی در چیست

حالا دیگر پاسخ دادن به این پرسش، چندان دشوار نیست. همان‌طور که در این چند مثال ساده دیدید، ترسیم‌های هندسی، اولاً بسیاری از قضایای هندسی را یادآوری می‌کنند، ثانیاً قوهٔ خلاقیت را در هندسه بسیار پرورش می‌دهند. آیا تمرینات کتاب درسی این نقش را به‌طور کامل و کافی ایفا کرده‌اند؟

برای کار بیشتر روی این مسئله‌ها هم اندیشه کنید:

۱. ذوزنقهٔ ABCD را با معلوم بودن طول‌های اضلاع آن رسم کنید.

۲. مثلث ABC را با معلوم بودن سه نقطهٔ وسط‌های اضلاع آن رسم کنید.

۳. مثلث ABC را با معلوم بودن طول‌های BC=a و AC=b و $\hat{A}-\hat{B}$ (با فرض $\hat{A} > \hat{B}$) رسم کنید. (**راهنمایی:** فرض کنید مسئله حل شده است و نقطهٔ C´ روی AB را طوری در نظر بگیرید که CC´=AC باشد.)

۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را با معلوم بودن وتر BC و میانهٔ BM رسم کنید. (**راهنمایی:** در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.)